BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

АНАЛИЗ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРА МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ

Н.К.АХМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет

В работе, методом асимптотического интегрирования теории упругости исследовано напряженно-деформированное состояние радиально-неоднородного цилиндра малой толщины. Построены неоднородные и однородные решения. На основании проведенного анализа разъяснен характер напряженно-деформированного состояния.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для радиально-неоднородного цилиндра малой толщины. Допустим, в цилиндрической системе координат цилиндр занимает объем

$$\Gamma = \{r \in [r_1, r_2];\ \theta \in [0, 2\pi];\ z \in [-L, L]\}.$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\left(L_0 + \varepsilon\,\partial\left(L_1 + L_2\right) + \varepsilon^2 \partial^2 L_3\right)\bar{u} = 0, \qquad (1.1)$$

здесь L_k - матричные дифференциальные операторы вида:

$$L_0 = \begin{pmatrix} \partial_1\left(\left(H\partial_1 + \varepsilon\lambda\right)e^{-\varepsilon\rho}\right) + 2G\left(\varepsilon\partial_1 - \varepsilon^2\right)e^{-\varepsilon\rho} & 0 \\ 0 & \partial_1\left(Ge^{-\varepsilon\rho}\partial_1\right) + \varepsilon G e^{-\varepsilon\rho}\partial_1 \end{pmatrix},$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & G\partial_1 + \partial_1(\lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial_1(G) + \lambda\partial_1 + (G+\lambda)\varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} Ge^{\varepsilon\rho} & 0 \\ 0 & He^{\varepsilon\rho} \end{pmatrix},$$

$\partial = \dfrac{\partial}{\partial \xi}$; $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial \rho}$; $H = 2G + \lambda$; $\rho = \dfrac{1}{\varepsilon}\ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right)$; $\xi = \dfrac{z}{r_0}$ - новые безразмерные переменные, $\rho \in [-1;1]$; $\xi \in [-l;l]$; $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$ - малый параметр, характеризующий толщину цилиндра, $r_0=\sqrt{r_1 r_2}$, $l=\dfrac{L}{r_0}$, $\overline{u}=\left(u_\rho, u_\xi\right)^T$, u_ρ, u_ξ - компоненты вектора перемещений; $G=G(\rho)$, $\lambda=\lambda(\rho)$ - параметры Ламе, рассматриваемые как произвольные положительные кусочно-непрерывные функции.

Предположим, что на боковых поверхностях цилиндра заданы следующие граничные условия:

$$\left.\overline{u}\right|_{\rho=\pm1}=\overline{q}^{\pm}(\xi), \tag{1.2}$$

где $\overline{q}^{\pm}(\xi)=\left(f^{\pm}(\xi);\ h^{\pm}(\xi)\right)^T$.

2. Рассмотрим построение частных решений уравнений (1.1), удовлетворяющих граничным условиям (1.2), т.е. неоднородных решений.

Предполагаем, что функции, заданные на боковых поверхностях цилиндра, достаточно гладкие функции и относительно ε имеют порядок $O(1)$.

Решение (1.1)-(1.2) будем отыскивать в виде:

$$\begin{aligned} u_\rho &= u_{p0}+\varepsilon u_{p1}+\ldots, \\ u_\xi &= u_{\xi0}+\varepsilon u_{\xi1}+\ldots \ . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.1), (1.2) приводит к системе, последовательное интегрирование которой по ρ дает соотношения для коэффициентов разложения (2.1):

$$\begin{aligned} u_{\rho0} &= -\frac{f(\xi)}{l_0}\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{H(x)}dx+f^-(\xi), \\ u_{\xi0} &= -\frac{h(\xi)}{G_0}\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{G(x)}dx+h^-(\xi), \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$u_{\rho1}=\frac{f(\xi)}{l_0}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{\lambda(y)}{H(y)}\left(\int_{-1}^{y}\frac{1}{H(x)}dx\right)dy-\int_{-1}^{\rho}\frac{x}{H(x)}dx+\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{H(y)}\left(\int_{-1}^{y}\frac{2G(x)}{H(x)}dx\right)dy\right)-$$

$$-\left(f^-(\xi)+\left(h^-(\xi)\right)'\right)\int_{-1}^{\rho}\frac{\lambda(x)}{H(x)}dx+\frac{h'(\xi)}{G_0}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{\lambda(y)}{H(y)}\left(\int_{-1}^{y}\frac{1}{G(x)}dx\right)dy+\int_{-1}^{\rho}\frac{x}{H(x)}dx\right)+$$

$$+\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{H(x)}dx\left[\frac{P_0}{l_0}\left(f^-(\xi)+\left(h^-(\xi)\right)'\right)+\frac{f(\xi)}{l_0^2}\left(l_1-\int_{-1}^{1}\frac{\lambda(y)}{H(y)}\left(\int_{-1}^{x}\frac{1}{H(x)}dx\right)dy-\right.\right.$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{1}{H(y)}\left(\int_{-1}^{x}\frac{2G(x)}{H(x)}dx\right)dy\Bigg)-\frac{h'(\xi)}{l_0G_0}\left(l_1+\int_{-1}^{1}\frac{\lambda(y)}{H(y)}\left(\int_{-1}^{y}\frac{1}{G(x)}dx\right)dy\right)\Bigg],$$

$$u_{\xi 1}=\frac{f'(\xi)}{l_0}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{G(y)}\left(\int_{-1}^{y}\frac{\lambda(x)}{H(x)}dx\right)dy+\int_{-1}^{\rho}\left(\int_{-1}^{y}\frac{1}{H(x)}dx\right)dy\right)-$$

$$-\left(f^-(\xi)\right)'(\rho+1)+\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{G(x)}dx\left[\frac{f'(\xi)}{G_0l_0}\left(l_1-l_0-\int_{-1}^{1}\frac{1}{G(\rho)}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{\lambda(x)}{H(x)}dx\right)d\rho\right)+\frac{2\left(f^-(\xi)\right)'}{G_0}\right],$$

где

$$h(\xi)=h^-(\xi)-h^+(\xi),\quad f(\xi)=f^-(\xi)-f^+(\xi),\quad G_k=\int_{-1}^{1}\frac{\rho^k}{G(\rho)}d\rho,\quad l_k=\int_{-1}^{1}\frac{1}{H(\rho)}\rho^k d\rho.$$

Анализ напряженного состояния показывает, что напряжения $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\rho\xi}$ относительно ε имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$.

3. Рассмотрим вопрос о построении однородных решений. Положим в (1.2) $\overline{q}^{\pm}(\xi)=\overline{0}$. Отыскивая решения однородных систем в виде:

$$u_\rho(\rho,\xi)=u(\rho)m'(\xi),$$

$$u_\xi(\rho,\xi)=w(\rho)m(\xi),$$

где $m''(\xi)-\mu^2 m(\xi)=0$, после разделения переменных получаем следующую задачу

$$\begin{cases}\left(L_0+\varepsilon L_1+\mu^2\varepsilon\left(L_2+\varepsilon L_3\right)\right)\overline{\vartheta}=\overline{0}, \\ \overline{\vartheta}\big|_{\rho=\pm 1}=\overline{0},\end{cases} \tag{3.1}$$

$\overline{\vartheta}(\rho)=(u,w)^T$.

Для решения (3.1) воспользуемся асимптотическим методом [1], основанном на трех итерационных процессах.

Если в (2.1), (2.2) положить $\overline{q}^{\pm}(\xi)=\overline{0}$, то получим, что к первому итерационному процессу соответствуют тривиальные однородные решения.

Решения, имеющие характер краевого эффекта, соответствующие второму асимптотическому процессу для неоднородного цилиндра с закрепленной боковой поверхностью, не существуют.

Согласно третьему асимптотическому процессу решение (3.1) ищем в виде:

$$\begin{aligned} u^{(3)}&=\varepsilon^2\mu_0^{-1}\left(a_0+\varepsilon a_1+\ldots\right), \\ w^{(3)}&=\varepsilon\left(b_0+\varepsilon b_1+\ldots\right), \\ \mu&=\varepsilon^{-1}\left(\mu_0+\varepsilon\mu_1+\ldots\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1), для первых членов разложения получаем:

$$A(\mu_0)\bar{f}_0 = \bar{0}\,, \tag{3.3}$$

где $A(\mu_0)\bar{f}_0 = \left\{ t(\mu_0)\bar{f}_0,\ \bar{f}_0\big|_{\pm 1} = \bar{0} \right\}$, $t(\mu_0)\bar{f}_0 = \left(A_0 + \mu_0 A_1 + \mu_0^2 A_2\right)\bar{f}_0$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} \partial_1(H\partial_1) & 0 \\ 0 & \partial_1(G\,\partial_1) \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1(\lambda) + G\,\partial_1 \\ \partial_1(G) + \lambda\,\partial_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}, \qquad \bar{f}_0 = (a_0\,;\, b_0)^T\,.$$

Спектральная задача (3.3) совпадает с задачей, описывающей потенциальное решение неоднородной по толщине плиты, которая изучена в [2; 3].

На следующем этапе получаем краевую задачу для определения $\bar{f}_1 = (a_1\,; b_1)^T$ и μ_1:

$$\begin{cases} t(\mu_0)\bar{f}_1 = \left(\rho A_0 + A_3 - \mu_0 A_4 - \rho\,\mu_0^2 A_2 - 2\mu_1(\mu_0 A_2 + A_5)\right)\bar{f}_0\,, \\ \bar{f}_1 = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \pm 1\,, \end{cases}$$

где

$$A_3 = \begin{pmatrix} \lambda\,\partial_1 - \partial_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (G+\lambda) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial_1(G) + \lambda\,\partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{f}_1 = (a_1;\, b_1)^T\,.$$

Условием разрешимости этой задачи является ортогональность правой части решению сопряженной задачи:

$$A^*(\mu_0)\bar{f}_0^* = A(-\bar{\mu}_0)\bar{f}_0^* = \bar{0},$$

где $\bar{f}_0^* = \left(\bar{a}_0^*; \bar{b}_0^*\right)^T$.

Из условия разрешимости для μ_1, получаем

$$\mu_1 = \frac{E_2}{E_1}; \tag{3.4.}$$

$$E_2 = \int_{-1}^{1}\Big[\lambda a_0'\,\bar{a}_0^* - \mu_0^2 G\,\rho\,a_0\,\bar{a}_0^* + \rho\left(G b_0'\right)'\bar{b}_0^* - \mu_0(G+\lambda)\,a_0\bar{b}_0^* - \mu_0^2\,\rho H\,b_0\bar{b}_0^* -$$

$$- \rho H a_0'\left(\bar{a}_0^*\right)' - H a_0'\,\bar{a}_0^* + \lambda\,a_0\left(\bar{a}_0^*\right)'\Big]d\rho;$$

$$E_1=\int_{-1}^{1}\left[2\mu_0\left(G\,a_0\,\overline{a}_0^*+H\,b_0\overline{b}_0^*\right)+2\lambda\,a_0'\overline{b}_0^*-2G\,a_0\left(\overline{b}_0^*\right)'\right]d\rho;$$

Решения, соответствующие третьему итерационному процессу, имеют вид:

$$u_\rho^{(3)}=\varepsilon^2\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\mu_{0k}^{-4}\left(\tau_0\psi_k''\right)'-2\mu_{0k}^{-2}\tau_1\psi_k'+\mu_{0k}^{-2}\left(\tau_2\psi_k\right)'+O(\varepsilon)\right]m_k'(\xi),$$

$$u_\xi^{(3)}=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left[\tau_0\mu_{0k}^{-2}\psi_k''-\tau_2\psi_k+O(\varepsilon)\right]m_k(\xi),$$

$$\sigma_{\rho\rho}=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left[\psi_k+O(\varepsilon)\right]m_k'(\xi), \tag{3.5}$$

$$\sigma_{\xi\xi}=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left[\mu_{0k}^{-2}\psi_k''+O(\varepsilon)\right]m_k'(\xi),$$

$$\sigma_{\rho\xi}=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\psi_k'+O(\varepsilon)\right]m_k(\xi),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\lambda\varepsilon\left(\tau_0-\tau_2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left[\psi_k+\mu_{0k}^{-2}\psi_k''+O(\varepsilon)\right]m_k'(\xi),$$

здесь $m_k(\xi)=D_k e^{\mu_k\xi}+C_k e^{-\mu_k\xi}$; $\psi_k(\eta)$ - решение обобщенной спектральной задачи Папковича для неоднородного случая [2-4]:

$$\left(\tau_0\psi_k''\right)''+\mu_{0k}^2\left(2\left(\tau_1\psi_k'\right)'-\left(\tau_2\psi_k\right)''-\tau_2\psi_k''\right)+\mu_{0k}^4\tau_0\psi_k=0$$

$$\begin{cases}\left(\tau_0\psi_k''\right)'-\mu_{0k}^2\left(\tau_2\psi_k\right)'=0\\ \psi_k'=0\end{cases}\quad \text{при}\quad \rho=\pm 1,$$

где $\tau_0=\dfrac{H}{4G(G+\lambda)}$, $\tau_1=\dfrac{1}{2G}$, $\tau_2=\dfrac{\lambda}{4G(G+\lambda)}$.

Из (3.5) видно, что первые члены асимптотических разложений напряжений и перемещений соответствуют самоуравновешенному в сечении $\theta=\text{const}$, $\xi=\text{const}$ напряженному состоянию, а само решение имеет характер пограничного слоя, эквивалентного краевому эффекту Сен-Венана в теории неоднородных плит [2; 3].

4. Допустим на торцах цилиндра заданы следующие граничные условия:

$$u_\rho=q_1^{\pm}(\rho),\quad \sigma_{\xi\xi}=q_2^{\pm}(\rho)\quad \text{при}\quad \xi=\pm l\ , \tag{4.1}$$

здесь $q_1^{\pm}(\rho)$, $q_2^{\pm}(\rho)$ – достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям равновесия.

Перемещения представим в виде:

$$u_\rho = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\rho) m_k'(\xi), \qquad u_\xi = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\rho) m_k(\xi). \tag{4.2}$$

Для напряжений получаем:

$$\sigma_{\xi\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{1k}(\rho) m_k'(\xi), \qquad \sigma_{\rho\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{2k}(\rho) m_k(\xi), \tag{4.3}$$

где $\sigma_{1k}(\rho) = Hw_k + \lambda\left(\frac{1}{\varepsilon} u_k' + u_k\right) e^{-\varepsilon\rho}$, $\sigma_{2k}(\rho) = G\left(\mu_k^2 u_k + \frac{e^{-\varepsilon\rho}}{\varepsilon} w_k'\right)$.

Для нахождения неизвестных постоянных C_k и D_k воспользуемся теоремой Бэтти [5]. Пусть $u_\xi^{(i)}$, $u_\rho^{(i)}$, $\sigma_{\xi\xi}^{(i)}$, $\sigma_{\rho\xi}^{(i)}$ ($i = 1,2$) – перемещения и напряжения первого и второго состояния. Тогда, согласно теореме Бэтти, на сечении $\xi = \text{const}$ справедливо равенство:

$$\int_{-1}^{1} \left(u_\xi^{(1)} \sigma_{\xi\xi}^{(2)} + \sigma_{\rho\xi}^{(2)} u_\rho^{(1)}\right) e^{2\varepsilon\rho} d\rho = \int_{-1}^{1} \left(u_\xi^{(2)} \sigma_{\xi\xi}^{(1)} + u_\rho^{(2)} \sigma_{\rho\xi}^{(1)}\right) e^{2\varepsilon\rho} d\rho . \tag{4.4}$$

В качестве первого состояния возьмем “ p ”-ое элементарное решение, а в качестве второго – “ n ”-ое элементарное решение. Подставляя (4.2), (4.3) в (4.4), получаем:

$$m_p(\xi) m_n'(\xi) \int_{-1}^{1} \left(w_p \sigma_{1n} - u_n \sigma_{2p}\right) e^{2\varepsilon\rho} d\rho + m_n(\xi) m_p'(\xi) \int_{-1}^{1} \left(\sigma_{2n} u_p - w_n \sigma_{1p}\right) e^{2\varepsilon\rho} d\rho = 0 .$$

Поскольку это равенство справедливо при любых ξ, тогда получаем условия обобщенной ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} \left(w_p \sigma_{1n} - u_n \sigma_{2p}\right) e^{2\varepsilon\rho} d\rho = 0 \qquad p \neq n . \tag{4.5}$$

Удовлетворяя граничным условиям (4.1) с помощью (4.2), (4.3), (4.5), находим неизвестные постоянные D_n и C_n:

$$D_n = \frac{d^+ e^{\mu_n l} - d^- e^{-\mu_n l}}{2\mu_n sh(2\mu_n l)}, \qquad C_n = \frac{d^+ e^{-\mu_n l} - d^- e^{\mu_n l}}{2\mu_n sh(2\mu_n l)},$$

где

$$d^\pm = \frac{\int_{-1}^{1} \left(q_2^\pm w_n - q_1^\pm \sigma_{2n}\right) e^{2\varepsilon\rho} d\rho}{\int_{-1}^{1} \left(\sigma_{1n} w_n - u_n \sigma_{2n}\right) e^{2\varepsilon\rho} d\rho} .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ. 1963, т. 27, в:4, стр.593-608.
2. Устинов Ю.А. Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит. Докл. АН СССР. 1974, т. 216, №4, стр.755-758.
3. Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А. К теории неоднородных по толщине плит. Изв. АН СССР, МТТ. 1975, №3, стр.119-129.
4. Устинов Ю.А. Осесимметричное напряженно-деформированное состояние неоднородной цилиндрической оболочки малой толщины. Прикладная механика. 1975, т.11, в.7, стр. 35- 41.
5. Лурье А.И. Теория упругости. М., Наука. 1970, 939 с.

ELASTİKİYYƏT NƏZƏRİYYƏSİNİN KİÇİK QALINLIQLI RADİUS BOYU QEYRİ-BİRCİNS SİLİNDR ÜÇÜN OXA GÖRƏ SİMMETRİK MƏSƏLƏSİNİN TƏHLİLİ

N.Q.ƏHMƏDOV

XÜLASƏ

Bu işdə asimptotik inteqrallama üsulu ilə kiçik qalınlıqlı radius boyu qeyri-bircins silindrin gərginlik-deformasiya vəziyyəti öyrənilir. Qeyri-bircins və bircins həllər qurulur. Aparılan təhlil əsasında gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilir.

ANALYSIS OF AXISYMMETRIC PROBLEM BY ELASTICITY THEORY FOR RADIAL INHOMOGENEOUS CYLINDER OF SMALL THICKNESS

N.K.AKHMEDOV

SUMMARY

In the paper the stress-strain State of a radial-inhomogeneous cylinder of small thickness is studied by the asymptotic integration method of elasticity theory. Inhomogeneous and homogeneous solutions are constructed. The character of the stress-strain state is explained on the base of the carried out analysis.